УПРАЖНЕНИЯ

12. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани 6 цветов?

13. В забеге участвуют 12 спортсменов. Сколько существует способов занять на финише 1-е, 2-е или 3-е место?

14. Имеется 10 кроликов. Необходимо выбрать из них 4 и посадить их в 4 клетки, обозначенные K_1, K_2, K_3, K_4. Сколькими способами это можно сделать?

15. Рассмотрим множество $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Сколько трехзначных чисел можно образовать из элементов этого множества, если не допускать повторений цифр? Сколько из этих чисел окажется меньше 500? Сколько из этих чисел больше 700?

16. На собрании должно выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д.
а) Сколькими способами можно составить список выступающих?
б) Сколько существует способов выступления, при которых Б выступает после А?
в) Сколько существует способов, при которых Б выступает непосредственно после А?

17. Выберите самостоятельно число членов некоторого комитета. Минимальный кворум для принятия решения этим комитетом должен быть не менее 0,75 его состава. Определите, сколькими способами можно достичь минимального кворума.

18. Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото» (зачеркнуть 6 номеров из 49)?

19. В лабораторной клетке находятся 8 белых и 6 коричневых кроликов. Найдите число способов выбора пяти кроликов из клетки, если: а) они могут быть любого цвета; б) 3 из них должны быть белыми, а 2 коричневыми; в) все 5 кроликов должны быть белыми; г) все 5 кроликов должны быть одного цвета.

20. В генетическом эксперименте 4 белых, 7 красных и 5 розовых цветков гороха были взяты из имеющихся 10 белых, 10 красных и 10 розовых цветков. Сколькими способами можно это сделать?

21. В первые три вагона поезда садятся 9 пассажиров по 3 человека в каждый вагон. Сколькими способами можно это сделать?

22. Сколько можно составить семизначных телефонных номеров из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

23. За столом рассаживаются n гостей. Сколько существует способов это сделать, если гости А и Б сидеть рядом не должны?

24. В школьной лотерее на 50 билетов разыгрывается 8 выигрышей. Первый подошедший к урне ученик выбирает из урны 5 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы:
а) среди них оказалось ровно 2 выигрышных;
б) по крайней мере 2 из них оказались выигрышными?

25. На плоскости n параллельных прямых пересекаются m параллельными прямыми. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

26. Среди 25 рабочих 5 маляров, 4 плотника и 3 штукатура. Сколькими способами можно укомплектовать бригаду из 5 человек так, чтобы в нее вошли ровно по одному маляру, плотнику и штукатуру?

27. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

28. Комплексная бригада состоит из 2 маляров, 3 штукатуров и 2 столяров. Сколько различных бригад можно создать из коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

29. В урне находится 10 белых и 7 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров, из которых белыми будут 3 шара?

30. Обобщите решение задачи **29** на случай наличия m белых шаров и n черных шаров. Из урны выбирается r шаров, из которых k шаров белых.

31. Определите число элементов n из условия:

а) $A_{2n}^3 = 20A_n^2$; **1) 5; 2) 6; 3) 4; 4) 3;**

б) $A_{n-4}^2 + A_{n-3}^2 + A_{n-2}^2 = 20$;

в) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$;

г) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$;

д) $C_n^4 = \frac{15}{4} A_n^2$;

е) $120C_{n+4}^{n-1} = 72A_{n+2}^3$.

32. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 120 фехтовальщиков каждое, нужно выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

33. На вершину горы ведут 10 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое, но при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

34. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

35. В магазине имеется 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме этого, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

36. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 200, а дают ему не более трех имен?

37. Проверка 1000 деталей, выпущенных при неизменной технологии, обнаружила 80 бракованных деталей. Чему равна частота и чему приближенно равна вероятность события A: «наугад взятая деталь бракованная»? Из этой партии деталей выбирается наугад 100 деталей.

а) Может ли оказаться, что все 100 деталей годные?

б) Может ли оказаться, что все 100 деталей бракованные?

в) Можно ли утверждать, что из выбранных деталей ровно две детали бракованные, а остальные доброкачественные?

г) Сколько (приближенно) бракованных деталей можно ожидать среди 100 000 деталей?

38. Обследование 16 000 семей, имеющих двух детей, дало следующие результаты: в 3968 семьях оба ребенка — мальчики; в 4112 семьях оба ребенка — девочки; в остальных семьях один ребенок — девочка, другой — мальчик.

а) Чему приближенно равны вероятности событий:

A — «в наугад взятой семье оба ребенка — девочки»;

B — «в наугад взятой семье оба ребенка — мальчики»;

C — «в наугад взятой семье один ребенок — девочка, другой — мальчик»?

б) Рассмотрим 200 000 семей, имеющих двух детей. Сколько можно ожидать (приближенно) среди них семей с двумя девочками, двумя мальчиками, семей, где один ребенок — девочка, другой — мальчик?

39. Обследование 30 000 жителей во время эпидемии гриппа выявило среди них 7451 больного. Чему равна частота и чему приближенно равна вероятность события A: «наугад выбранный житель болен гриппом»?

а) Можно ли утверждать, что гриппом заболеет ваш друг?

Пример 1.

Пусть опыт состоит в бросании двух кубиков. Пусть событие A_1 — «выпадает четная сумма очков» и событие A_2 — «выпадают очки одной и той же четности». Ясно, что $A=B$.

Пример 2.

При бросании одного кубика равными окажутся события: A — «выпало простое четное число», B — «выпало число, большее единицы, но меньшее трех».

Определение 2. ***Объединением*** **(или суммой)** ***событий*** **A и B называется событие C, которому благоприятны все исходы, благоприятные или событию A, или событию B, или им обоим. Обозначим эту сумму так: $C=A\cup B$ или $C=A+B$.**

Пример 3.

Опыт состоит в бросании кубика. Пусть событие A — «число очков делится на три», а событие B — «выпало четное число очков». Событие $C=A\cup B$ состоит в том, что выпало число очков, отличное от 1 и 5.

Действительно, событию A благоприятствуют исходы $A=(3;\ 6)$, событию B — исходы $(2;\ 4;\ 6)$. Теперь видно, что событию $C=A\cup B$ благоприятствуют исходы $(2;\ 3;\ 4;\ 6)$.

Пример 4.

Опыт состоит в том, что два стрелка стреляют в мишень по одному разу. Пусть событие A — «в мишень попал первый стрелок», событие B — «в мишень попал второй стрелок».

Событие $C=A\cup B$ состоит в том, что цель поражена. Это сделал либо первый стрелок, либо второй или цель поразили оба стрелка.

До сих пор мы рассматривали объединение двух событий. Можно рассматривать и объединение любого числа событий.

Рассмотрим трех стрелков, стреляющих в мишень по одному разу. Если события A_1, A_2, A_3 означают соответственно попадание в мишень первым, вторым и третьим стрелком, то событие

$$C=A_1\cup A_2\cup A_3$$

означает, что в мишень попал хотя бы один стрелок.

2. Противоположные события. Рассмотрим некоторый опыт и два события A и B, связанные с ним.

Определение. События A и B называют *противоположными* друг другу, если любой исход опыта благоприятен одному и только одному из них. Событие, противоположное событию A, в теории вероятностей обозначают через $\overline{A}$.

Приведем примеры.

Пример 1.

Событию A — «три дня подряд шел дождь» противоположно событие $\overline{A}$ — «хотя бы в один из трех дней дождя не было».

Пример 2.

Событию A — «среди вынутых 5 шаров нет ни одного красного» противоположно событие $\overline{A}$ — «среди вынутых шаров хотя бы один шар красный».

Пример 3.

Событию A — «попадание при выстреле» противоположно событие $\overline{A}$ — «промах при выстреле».

Пример 4.

Событию A — «три попадания при трех выстрелах» противоположно событие $\overline{A}$ — «хотя бы один промах при трех выстрелах».

Пример 5.

Событие A — «мишень поражена первым стрелком» и событие B — «мишень поражена вторым стрелком» противоположными не являются — мишень может быть поражена каждым стрелком.

Пример 6.

Пусть событие A состоит в том, что изготовленная деталь доброкачественная, тогда событие $\overline{A}$ заключается в том, что деталь бракованная. Если вероятность $p(A)=0{,}85$, то $p(\overline{A})=1-0{,}85=0{,}15$.

Если события A и $\overline{A}$ противоположные, то они обязательно несовместны. Это вытекает из их определения. Пусть опыт имеет n равновозможных исходов, и если m из этих исходов благоприятствуют событию A, то остальные $n-m$ исходов благоприятствуют событию $\overline{A}$, и поэтому $p(A)=\frac{m}{n}$, а $p(\overline{A})=\frac{n-m}{n}$. Между $p(A)$ и $p(\overline{A})$ существует важное соотношение: $p(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-p(A)$, или

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \tag{1}$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Важность соотношения (1) для практического вычисления вероятности событий состоит в том, что в ряде случаев легче вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, а затем по формуле (1) вычислить вероятность события A.

Соотношение (1) мы получили, опираясь на классическое определение вероятности. Можно доказать, что соотношение (1) справедливо и в общем случае.

3. Вероятность объединения несовместных событий. Рассмотрим опыт, имеющий n равновозможных элементарных исходов и два несовместных события A и B, связанные с этим опытом.

Пусть событию A благоприятствует m исходов, а событию B благоприятствует k исходов. Тогда вероятности $p(A)$ и $p(B)$ событий A и B определяются соотношениями $p(A)=\frac{m}{n}$; $p(B)=\frac{k}{n}$.

По предположению события A и B несовместны, и поэтому не существует исходов, благоприятных одновременно и событию A, и событию B. Отсюда следует, что событию $A\cup B$ благоприятствует $m+k$ исходов, и поэтому

$$p(A\cup B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=p(A)+p(B). \tag{2}$$

Таким образом, доказана теорема, называемая **теоремой сложения вероятностей.**

Теорема 1. Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Мы доказали теорему 1 для случая классического подхода к определению вероятности. Теорема 1 верна для любых несовместных событий A и B.

Следствие.

Теорема 1 доказана для двух несовместных событий A и B. Последовательным применением теоремы 1 к конечному числу попарно несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n мы получим

$$p(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n). \tag{3}$$

Прежде чем переходить к примерам, рассмотрим опыт, заключающийся в выстреле по стандартной мишени. Он имеет 11 исходов:

промах (ноль очков) или получение 1, 2, 3, ..., 10 очков. Эти исходы мы обозначим через A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}. Все они несовместны между собой потому, что нельзя одним выстрелом выбить различное число очков. Более того, эти исходы образуют полную группу потому, что при выстреле одно из событий A_0, A_1, A_2, ..., A_{10} обязательно произойдет. Допустим, что в одинаковых условиях было произведено большое число выстрелов. Частоту $p(U)$ получения n очков зададим таблицей.

Исходы	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Количество выбитых очков U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота $p(U)$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	0,05	0,05	0,1	0,2	0,5

Одинаковость условий и большое число выстрелов позволяют считать, что вероятность каждого исхода совпадает с его частотой.

Пример 1.

Найдем вероятность того, что стрелок выбьет не менее 9 очков.

Решение. Событие A — «выбить не менее 9 очков» является объединением событий A_9 — «выбить 9 очков» и A_{10} — «выбить 10 очков» (см. табл.). Так как события A_9 и A_{10} несовместны, то по теореме 1 получаем $p(A)=p(A_9)+p(A_{10})=0,2+0,5=0,7$.

Пример 2.

Найдем вероятность того, что при выстреле по мишени получится число очков, строго большее 6.

Решение. Событие A — «выбить число очков, большее 6» является объединением несовместных событий A_7 — «выбить 7 очков», A_8 — «выбить 8 очков», A_9 — «выбить 9 очков» и A_{10} — «выбить 10 очков», т. е. $A=A_7\cup A_8\cup A_9\cup A_{10}$.

Из соотношения (3) получаем $P(A)=P(A_7)+P(A_8)+P(A_9)+P(A_{10})$. Используем данные таблицы и окончательно получим

$$P(A)=0,05+0,1+0,2+0,5=0,85.$$

Пример 3.

Производится одиночный выстрел в мишень. Найдем вероятность того, что будет выбито число очков, не меньшее 2 и не большее 4 или не меньшее 8.

Решение. Событие C — «выбито число очков, не меньшее 2 и не большее 4 или не меньшее 8» является объединением событий A_2 —

«выбито 2 очка», A_3 — «выбито 3 очка», A_4 — «выбито 4 очка» и событий A_8 — «выбито 8 очков», A_9 — «выбито 9 очков» и A_{10} — «выбито 10 очков». Все эти события несовместны, поэтому можно применить формулу (3). Учитывая данные таблицы, имеем $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_8 \cup A_9 \cup A_{10}$. Отсюда получаем

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) =$$
$$= 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}83.$$

До сих пор при применении теоремы 1 мы задавали вероятности событий A и B. Очень часто встречается ситуация, в которой сначала надо найти вероятности $p(A)$ и $p(B)$, а уже затем применить теорему 1. В этом случае полезно применять методы комбинаторики.

Пример 4.

В урне находится 5 красных и 6 белых шаров, неразличимых на ощупь. Опыт состоит в том, что из урны случайным образом вынимают 4 шара. Найдем вероятность того, что среди них белых шаров меньше 2.

Решение. Событие C — «среди вынутых шаров белых шаров меньше 2» является объединением двух несовместных событий A и B. Событие A — «среди вынутых шаров только один шар белый, а 3 шара красные». Событие B — «среди вынутых шаров нет ни одного белого», т. е. все 4 шара красные.

Так как события A и B несовместны и $C = A \cup B$, то $P(C) = P(A) + P(B)$.

Пользуясь формулами комбинаторики, найдем $P(A)$ и $P(B)$.

Число всевозможных способов извлечения 4 шаров из имеющихся 11 шаров равно:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

Вычислим количество исходов, благоприятствующих событию A. Один белый шар из 6 имеющихся можно выбрать 6 различными способами. Три красных шара из имеющихся 5 красных шаров можно выбрать $C_5^3 = C_5^2$ различными способами. Значит, событию A благоприятствуют $m = 6 \cdot C_5^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 60$ способов и $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$. Событию B благоприятствуют k исходов, $k = C_5^4 = 5$, поэтому $p(B) = \frac{k}{n} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$ (из имеющихся 5 красных шаров выбирают 4 шара). Имеем $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{2}{11} + \frac{1}{66} = \frac{13}{66}$.

Пример 5.

В урне находятся 6 красных и 8 белых шаров. Из этих 14 шаров наугад выбрано 5 шаров. Какова вероятность того, что все выбранные шары одного цвета?

Решение. Пусть событие A — «выбрано 5 красных шаров», событие B — «выбрано 5 белых шаров». Обозначим событие C — «выбраны шары одного цвета». События A и B несовместны, $C = A \cup B$, и поэтому $P(C) = P(A) + P(B)$. Найдем $P(A)$ и $P(B)$. Снова воспользуемся формулами комбинаторики. Заметим, что количество способов извлечения 5 шаров из урны, где находится $14 = 6 + 8$ шаров, равно $n = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002$.

Вычислим число исходов, благоприятствующих событию A. Имеем $m = C_6^5 = 6$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n}$, т. е. $P(A) = \frac{6}{2002}$. Событию B благоприятствуют $k = C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ исходов, поэтому $P(B) = \frac{k}{n}$, т. е. $P(B) = \frac{56}{2002}$.

По формуле (1) получаем

$$p(C) = p(A) + p(B) = \frac{6}{2002} + \frac{56}{2002} = \frac{62}{2002} = \frac{31}{1001}.$$

Пример 6.

Симметричная монета подбрасывается два раза. Какова вероятность того, что она хотя бы один раз падает гербом вверх (Г — герб, Ц — цифра)?

Решение. Пусть событие C — «хотя бы один раз монета падает гербом вверх». Введем событие A — «оба раза монета упала гербом вверх». Обозначим это так: $A = \{Г; Г\}$. Событие $B = (Г; Ц)$ — «при первом бросании монета упала гербом вверх, при втором — цифрой вверх». Событие D — «при первом бросании монета упала вверх цифрой, при втором — гербом вверх». Обозначим это так: $D = (Ц; Г)$. Событие E — «при обоих бросаниях сверху была цифра». Обозначим это так: $E = \{Ц; Ц\}$.

События B, C, D, E несовместны, и, кроме того, $C = A \cup B \cup D$. По теореме 1 и ее следствию $p(C) = p(A) + p(B) + p(D) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4. Пересечение событий и вероятность объединения совместных событий. Рассмотрим события A и B, связанные с некоторым опытом.

Определение. ***Пересечением событий*** **A и B называют событие C, которому благоприятны лишь те исходы, которые благоприятны одновременно и событию A, и событию B. Обозначим это так: $C = A \cap B$ или $C = A \cdot B$.**

Пример 1.

Пусть опыт состоит в выборе двух двузначных чисел. Определим событие A — «выбранные числа кратны 2», событие B — «выбранные числа кратны 3». Событие $C = A \cap B$ состоит в том, что выбранные числа одновременно кратны 2 и кратны 3, поэтому событие $C=A\cap B$ состоит в том, что выбранное число кратно 6.

Пример 2.

Пусть по мишени производится два выстрела. Рассмотрим событие A — «попадание при первом выстреле» и событие B — «попадание при втором выстреле». Событие $C=A\cap B$ состоит в том, что мишень будет поражена как при первом выстреле, так и при втором.

Пример 3.

Имеется партия серийно выпускаемых деталей, у которых контролируется величина диаметра d. Номинальный размер диаметра $d=35$ мм, заданы границы поля допуска [34,995; 35,011]. Среди деталей есть доброкачественные и бракованные.

Пусть событие A — «попадание диаметра детали в поле допуска», $A=[34{,}995\leqslant d\leqslant 35{,}011]$, т. е. деталь доброкачественная; событие B — «диаметр детали не меньше номинального размера», т. е. $B=[d\geqslant 35]$. Событие $C=A\cap B$ наступает тогда, когда одновременно происходят события A и B, т. е. событие $C=A\cap B$ состоит в том, что диаметр детали не меньше номинального размера 35 мм, но при этом не выходит за правый край поля допуска:

$$C=\{35{,}000\leqslant d\leqslant 35{,}011\}.$$

Другими словами, событие $C=A\cap B$ наступает тогда, когда деталь доброкачественная и диаметр ее не меньше номинального размера.

Перейдем к вычислению вероятностей.

Теорема 1, доказанная выше, существенно использует несовместность рассматриваемых событий. Это условие очень важно, без него правило сложения вероятностей становится неверным, а его применение приводит к грубым ошибкам.

Пример.

Пусть производится выстрел в мишень двумя стрелками, пусть событие A — «попадание в мишень первого стрелка», событие B — «попадание в мишень второго стрелка» и известно, что $p(A)=0{,}8$, $p(B)=0{,}7$. Найдем вероятность поражения мишени при одновременном выстреле обоих стрелков — это событие обозначим через C. Тогда $C=A\cup B$, но $P(C)=P(A)+P(B)=0{,}8+0{,}7=1{,}5$. Результат явно неверный потому, что всегда $0\leqslant p\leqslant 1$. Наша ошибка состоит в том, что мы нарушили условие несовместности событий A и B. Эти события могут произойти одновременно, ибо нет никаких преград поразить цель обоим стрелкам при одновременном выстреле!

Выведем формулу для вычисления вероятности совместных событий. Рассмотрим опыт и связанные с ним события A и B. Используем классический подход к определению вероятности. Пусть n — общее число равновозможных исходов опыта, m — число исходов, благоприятствующих событию A, k — число исходов, благоприятствующих событию B. Поскольку события A и B предполагаются совместными, то существуют исходы, благоприятные и событию A, и событию B. Пусть число таких исходов равно l. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{l}{n}$.

Событию $A\cup B$ благоприятствуют $(m+k-l)$ исходов, и поэтому $P(A\cup B)=\frac{m+k-l}{n}$, или $P(A\cup B)=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}$, т. е.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (4)$$

Таким образом, вероятность объединения двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их пересечения. Сразу отметим, что формула (4) не решает всех вопросов, связанных с нахождением $P(A\cup B)$, потому, что у нас еще нет способов нахождения $P(A\cap B)$. Ниже мы устраним этот пробел, а сейчас приведем примеры, в которых $P(A\cap B)$ вычисляется непосредственно.

Пример 1.

Бросается 2 монеты. Рассматриваются два события: A — «выпадение герба на первой монете» и B — «выпадение герба на второй монете». Найдем вероятность события $C=A\cup B$.

Решение. События A и B совместны потому, что герб может выпасть на каждой монете. Применим формулу (4).

Из четырех исходов опыта (ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ) событию $A\cap B$ благоприятствует только один исход (ГГ), поэтому $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

По формуле (4) имеем $P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Пример 2.

В классе 30 учащихся. 20 учеников участвовали в олимпиаде по математике, 15 — в олимпиаде по физике. 6 учеников приняли участие в обеих олимпиадах. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик класса участвовал хотя бы в одной из олимпиад?

Решение. Пусть событие A — «ученик принял участие в олимпиаде по математике», событие B — «ученик принял участие в олимпиаде по физике». Нас интересует событие $C=A\cup B$. События A и B не являются несовместными потому, что ученик мог участвовать в обеих олимпиадах. Применим формулу (4). Событию A благоприятствуют 20 исходов, и поэтому $p(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, событию B — 15 исходов, поэтому $P(B)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, событию $A\cap B$ — 6 исходов, т. е. $P(A\cap B)=\frac{6}{30}=$ $=\frac{1}{5}$. По формуле (4) получаем $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{29}{30}$.

Пример 1.

Пусть из двух урн, в которых находятся красные и белые шары, наудачу вынимают по одному шару. Пусть событие A — «из первой урны извлечен белый шар», событие B — «из второй урны извлечен белый шар». Эти два события никак не связаны между собой потому, что цвет шара, извлеченного из одной урны, никак не может повлиять на цвет шара, извлеченного из другой урны. Однако так происходит не всегда, как показывает следующий пример.

Пример 2.

В урне находятся 5 белых и 7 красных шаров. Из нее последовательно один за другим вынимают наугад два шара. Рассмотрим событие A — «первым извлечен белый шар» и событие B — «вторым извлечен белый шар». Вероятность события A равна $P(A)=\frac{5}{12}$. Что касается события B, то здесь ситуация иная. Если событие A произошло, то в урне осталось $11=5+7-1$ шаров, среди которых $4=5-1$ белых шара, и тогда $p(B)=\frac{4}{11}$. Если же событие A не произошло (первым извлечен красный шар), то в урне осталось, как и раньше, $11=5+7-1$ шаров, среди которых 5 белых, и теперь $p(B)=\frac{5}{11}$.

Итак, мы столкнулись с ситуацией, в которой вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. В отличие от примера 1 события A и B связаны между собой. Выясним различие ситуаций, рассмотренных в примерах 1 и 2.

Основываясь на классическом определении вероятности, подробнее рассмотрим пример 1. Вычислим вероятность события $C=A\cap B$. Обозначим число шаров в первой и второй урнах через n_1 и n_2, а число белых шаров в них через m_1 и m_2. Тогда $P(A)=\frac{m_1}{n_1}$, $P(B)=\frac{m_2}{n_2}$. Поскольку каждый из n_1 исходов изъятия шара из первой урны может комбинироваться с каждым из n_2 исходов изъятия шара из второй урны, то общее число всех исходов равно $n_1\cdot n_2$, а из них 2 белых шара изымаются только в $m_1\cdot m_2$ случаях. Это значит, что вероятность пересечения событий A и B равна $P(A\cap B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}$, откуда следует, что

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B). \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что вероятность пересечения независимых событий A и B равна произведению их вероятностей.

К ситуации, приведенной в примере 2, равенство (5) неприменимо. Теперь можно сформулировать следующее определение независимых событий:

Определение. Пусть события A и B связаны с некоторым опытом. Эти события называются *независимыми*, если для них правило нахождения вероятности пересечения удовлетворяет условию (5), т. е. вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей.

Отметим, что формула (5) позволяет определить, зависимы ли события A и B. Более того, формула (5) частично, для независимых событий, решает вопрос о нахождении вероятности пересечения событий A и B. Решение этого вопроса для зависимых событий мы рассмотрим ниже.

Пример 3.

Из первых двадцати натуральных чисел наугад выберем одно число. Пусть событие A — «выбранное число является четным», событие B — «выбранное число делится на 3». Выясним, являются ли эти события независимыми между собой.

Решение. Событию A благоприятствуют 10 исходов: (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20), поэтому $p(A)=\frac{10}{20}$, событию B — 6 исходов: (3, 6, 9, 12, 15, 18), поэтому $p(B)=\frac{6}{20}$. Событие $A\cap B$ состоит из чисел, делящихся на 6, $A\cap B=(6, 12, 18)$, поэтому $p(A\cap B)=\frac{3}{20}$. Проверим равенство (5):

$$\frac{3}{20}=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{20}=\frac{3}{20}.$$

Равенство (5) выполнено, поэтому события A и B независимы. Зависимые события A и B приведены в примере 2 и в рассмотренном ниже примере 4.

Пример 4.

Из первой сотни чисел 1, 2, ..., 100 наугад выбирается одно число. Обозначим событие A — «выбранное число делится на 3», событие B — «выбранное число делится на 4». Выясним, зависимы или независимы эти события.

Решение. Рассмотрим событие $C=A\cap B$. Это событие состоит в том, что выбранное число делится и на 3, и на 4, т. е. делится и на 12. Прямой подсчет показывает, что среди первых 100 чисел на 3 делятся 33 числа, на 4 — 25 чисел, а на 12 — 8 чисел. Поэтому $p(A)=\frac{33}{100}$, $p(B)=\frac{25}{100}$, $p(A\cap B)=\frac{8}{100}$, $p(A\cap B)=\frac{8}{100}\neq p(A)\cdot p(B)=\frac{33}{100}\cdot\frac{25}{100}$, равенство (5) не выполнено, поэтому события A и B зависимы.

6. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B возникает необходимость выяснения, связаны ли между собой эти события и в какой мере наступление одного из событий влияет на возможность наступления другого события. Исходя из классического подхода, проанализируем конкретный пример.

Пусть опыт состоит из троекратного подбрасывания симметричной монеты. Возможны 8 исходов: (ГГГ, ГЦГ, ЦГГ, ГГЦ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ).

Пусть событие A — «герб выпал ровно один раз». Ему благоприятствуют 3 исхода: {ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ}. Исходя из классического подхода, получаем $p(A)=\frac{3}{8}$. Через B обозначим событие — «число выпавших гербов нечетно». Ему благоприятствуют 4 исхода: {ГГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ}. Пусть об исходе опыта известно, что прозошло событие B. Теперь событию A будут благоприятствовать 3 исхода из 4, благоприятствующих событию B, поэтому $p(A)=\frac{3}{4}$, что отличается от первоначальной вероятности $p(A)=\frac{3}{8}$. Вероятность события A изменилась после того, как стало известно, что произошло событие B. Новую вероятность события A в предположении о том, что произошло событие B, называют **условной вероятностью события A** и обозначают так: $p(A|B)$. Черта между A и B означает «при условии». В нашем случае $p(A)=\frac{3}{8}$, а $p(A|B)=\frac{3}{4}$.

Обратим внимание на то, что пересечению $A\cap B$ благоприятствуют 3 исхода, поэтому $p(A\cap B)=\frac{3}{8}$, кроме этого, $p(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, а $p(A|B)=\frac{3}{4}$. Можно заметить, что между этими числами существует соотношение $p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B)$. Это не случайно. Справедлива теорема умножения вероятностей.

Теорема 2. Вероятность пересечения произвольных событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A) \tag{6}$$

или

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B). \tag{7}$$

Докажем соотношение (6) для классического определения вероятности.

Рассмотрим опыт, имеющий n исходов. Пусть событию A благоприятствуют m исходов из возможных n исходов и из этих m исходов l исходов благоприятствуют событию B. Тогда пересечению событий $A \cap B$ будут благоприятствовать l из n возможных исходов опыта. Определим вероятности: $p(A)=\frac{m}{n}$; $p(A \cap B)=\frac{l}{n}$; $p(B|A)=\frac{l}{m}$.

Отсюда следует

$$p(A \cap B)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}=p(A) \cdot p(B|A).$$

Соотношение (6) доказано. Для доказательства формулы (7) в соотношении (6) поменяем местами события A и B, в результате чего получим $p(A \cap B)=p(B) \cdot p(A|B)$. Из формул (6) и (7) вытекает интересное соотношение: $p(A) \cdot p(B|A)=p(B) \cdot p(A|B)$.

Если события A и B независимы, то

$$p(A \cap B)=p(A) \cdot p(B). \tag{8}$$

При $p(A)>0$ из формулы (6) следует, что

$$p(A) \cdot p(B)=p(A) \cdot p(B|A), \text{ т. е. } p(B)=p(B|A). \tag{9}$$

При $p(B)>0$ из формулы (7) получаем $p(A) \cdot p(B)=p(B) \cdot p(A|B)$, или

$$p(A)=p(A|B). \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что введение понятия условной вероятности позволяет дать новое толкование независимости случайных событий. Равенства (9) и (10) показывают, что условные и безусловные вероятности независимых случайных событий совпадают между собой. Другими словами, вероятность события A не изменится при наступлении или ненаступлении события B и наоборот.

Мы рассмотрели два случайных события A и B. Понятие независимости случайных событий переносится и на число событий более двух.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, связанные с некоторым опытом. Мы назовем их независимыми в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не изменяет своего значения после того, как осуществилось одно или несколько из остальных событий. В этом случае

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{11}$$

Пример 1.

Какова вероятность события A, что при пятикратном бросании монеты герб выпадет 5 раз?

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 означают выпадение герба при первом, втором, третьем, четвертом и пятом бросаниях.

Поскольку выпадание герба при одном бросании никак не влияет на его выпадение при любом другом, то события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 независимы в совокупности, и поэтому можно применить формулу (11) при $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=P(A_5)=\frac{1}{2}$.

Поэтому $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}\approx 0{,}031$.

Пример 2.

Два станка работают независимо друг от друга. Их обслуживает один наладчик. Известна вероятность события A — «первый станок в течение часа не потребует внимания наладчика», $P(A)=0{,}75$. Известна и вероятность события B — «второй станок в течение часа не потребует внимания наладчика», $P(B)=0{,}6$.

Найдем вероятности событий C и D, если событие C — «в течение часа ни один станок не потребует внимания наладчика», событие D — «в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания наладчика».

Решение. События A и B независимы друг от друга, поэтому применим формулу (8): $P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}75\cdot 0{,}6=0{,}45$.

Событие D противоположно событию E — «оба станка в течение часа потребуют внимания наладчика». Поэтому $P(D)+P(E)=1$ и $E=\overline{A}\cap\overline{B}$. С другой стороны, $P(\overline{A})=0{,}25$, $P(\overline{B})=0{,}4$.

Поэтому $P(E)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1$; $P(D)=1-P(E)=1-0{,}1=0{,}9$.

Пример 3.

В урне находится 5 белых и 8 красных неразличимых на ощупь шаров. Из урны извлекают 2 шара. Найдем вероятность события C — «оба шара имеют красный цвет».

Решение. Будем считать, что шары извлекаются последовательно. Пусть событие A — «при первом извлечении появляется красный шар», а событие B — «красный шар появляется при втором извлечении». Нас интересует вероятность $P(C)=P(A\cap B)$. В этом случае события A и B независимыми не являются, и поэтому формулу (8) применить нельзя. Используем формулу $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$, $P(A)=\frac{8}{13}$. После того как событие A произошло, в урне осталось $12=13-1$ шаров, среди которых $7=8-1$ красных. Поэтому имеем $p(B|A)=\frac{7}{12}$.

Следовательно, $p(A\cap B)=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{39}\approx 0{,}359$.

Пример 4.

Рассмотрим натуральные числа от 1 до 30. Пусть событие A — «наугад выбранное число делится на 3», событие B — «наугад вы-

12*

бранное число делится на 5». Найдем вероятность события C — «наугад выбранное число делится на 15».

Решение. События A и B независимыми не являются потому, что деление числа на 3 не исключает его деления на 5. Чтобы найти $p(C)=p(A\cap B)$, заметим, что событию A благоприятствуют 10 исходов (столько чисел делится на 3 среди чисел от 1 до 30), поэтому $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Пусть событие A произошло, тогда $p(B|A)=\frac{2}{10}$, и поэтому $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{15}$.

Подведем итог наших рассуждений о вероятностях объединения и пересечения событий A и B, вероятности которых равны $P(A)$ и $P(B)$.

1) Если события A и B несовместны, то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

2) Если события A и B независимы друг от друга, то $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

3) Для того чтобы найти вероятности объединения совместных событий A и B, надо знать $p(A\cap B)$ потому, что $p(A\cup B)=p(A)+$ $+p(B)-p(A\cap B)$.

4) Для того чтобы найти вероятности пересечения зависимых событий A и B, надо знать условную вероятность $p(A|B)$ или $p(B|A)$.

Тогда $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=p(B)\cdot p(A|B)$.

Из последней формулы при известной вероятности $p(A\cap B)$ и $p(A)\neq 0$ можно найти условную вероятность $p(B|A)$ или $p(A|B)$, если $p(B)\neq 0$.

7. Последовательные испытания и формула Бернулли (1654—1705). При практическом применении теории вероятностей часто приходится один и тот же опыт повторять многократно. При этом в результате каждого опыта связанное с ним событие A может произойти или не произойти. Вероятности таких событий мы изучили выше.

Теперь нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а общее число появления события A при проведении некоторой серии опытов. Если изучается партия деталей, то нас, как правило, будет интересовать не доброкачественность и бракованность отдельной детали, а общее число доброкачественных деталей. Аналогичная ситуация возникает и при анализе результатов стрельб.

Пример.

Из партии деталей, в которой содержатся как годные, так и бракованные детали, случайным образом выбирают 3 детали. Найдем вероятность того, что будут извлечены ровно две годные детали, если вероятность выбора годной детали равна p.

Решение. Обозначим через B событие — «извлечены ровно две годные детали». Это событие может осуществиться только тремя способами.

1. Первой извлечена годная деталь, второй извлечена тоже годная деталь, а третьей — бракованная.

2. Первой и третьей извлечены доброкачественные детали, а второй — бракованная.

3. Первой извлечена бракованная деталь, а две, извлеченные потом, оказались доброкачественными.

Рассмотрим события A_1 — «первой извлечена годная деталь», A_2 — «второй извлечена годная деталь» и A_3 — «третьей извлечена годная деталь».

Тогда $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p$. События $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, противоположные событиям A_1, A_2, A_3, означают соответственно выбор бракованной детали при извлечении первой, второй и третьей деталей. При этом $p(\overline{A}_1)=p(\overline{A}_2)=p(\overline{A}_3)=1-p=q$.

Теперь интересующее нас событие B можно представить в виде

$$B=(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3)\cup(A_1\cap \overline{A}_2\cap A_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3).$$

Это равенство показывает, что событие B представлено в виде объединения несовместных событий, поэтому можно применить теорему о вероятности объединения несовместных событий:

$$P(B)=(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3)+P(A_1\cap \overline{A}_2\cap A_3)+P(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3).$$

В свою очередь, события, образующие пересечение слагаемых, являются независимыми друг от друга, и можно применить теорему о вероятности пересечения независимых событий.

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=3p^2q.$$

Итак, вероятность того, что среди трех выбранных деталей ровно две детали будут доброкачественными, равна $3p^2q$.

Мы рассмотрели один частный случай. В общем случае рассматриваются n опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью $1-p$. Вероятность того, что в этих n опытах событие A появится ровно m раз, определяется соотношением

$$P(A)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}. \qquad (12)$$

В рассмотренном выше случае $n=3$, $m=2$, $C_3^2=3$, $S=3p^2q$, что совпадает с полученным ранее результатом.

Пример 1.

Производится 5 выстрелов по мишени, вероятность попадания в которую равна 0,7. Найти вероятность того, что при этих 5 выстрелах мы получим ровно три попадания.

Решение. Применим формулу (12) при $n=5$, $m=3$, $p=0{,}7$, $q=1-p=0{,}3$ и получим $S=C_5^3\cdot(0{,}7)^3\cdot(0{,}3)^2=0{,}3087$.

Полученный результат означает, что приблизительно в одной трети случаев при 5 выстрелах мы будем получать ровно 3 попадания.

Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_1, A_2, A_3 и $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ следующие события:
1) A — «все три попадания»; 2) B — «все три промаха»; 3) C — «хотя бы одно попадание»; 4) D — «хотя бы один промах».

60. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не менее трех и не более 5 очков.

61. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не меньше 8 очков.

62. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет больше 3 очков.

63. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не более 8 очков.

64. В урне находится 10 красных шаров и 8 белых. Из этих 18 шаров наугад выбираются 3 шара. Найдите вероятность того, что все выбранные шары одного цвета.

65. В ящике 7 годных и 6 бракованных неразличимых на взгляд мяча. Из ящика наугад выбирают 4 мяча. Найдите вероятность того, что среди выбранных 4 мячей будет меньше 2 бракованных.

66. В урне находится 9 красных и 7 белых шаров. Из этих 16 шаров наугад вынимают 3 шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров красных шаров будет меньше 2.

67. В урне находится 7 черных шаров и 6 белых. Из этих 13 шаров наугад вынимают 4 шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых 4 шаров будет не более чем 3 белых шара.

68. Из 35 учеников класса успешно написали контрольную работу по математике 28 учеников, контрольную работу по физике 17 учеников. Известно, что успешно написали контрольные работы и по физике, и по математике 14 человек. Из класса наугад выбрали одного ученика. Найдите вероятность того, что он успешно выполнил хотя бы одну из контрольных работ.

69. В урне находится 30 неразличимых на ощупь шаров, пронумерованных от 1 до 30. Из урны выбирают один шар. Пусть событие A — «из урны вынут шар с четным номером», событие B — «из урны вынут шар, номер которого делится на 3». Найдите вероятность события C — «номер выбранного шара будет либо четным, либо будет числом, делящимся на 3, либо и тем и другим».

70. Наугад выберем одну из карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Будут ли зависимы или независимы между собой события A и B, если событие A — «вынута карточка с четным числом», событие B — «выбрана карточка с числом, делящимся на 5»?

71. Из чисел от 1 до 14 наугад выбирается одно число. Событие A заключается в том, что выбранное число делится на 2, а событие B — в том, что оно делится на 7. Зависимы ли они?

72. Из чисел от 1 до 20 выбирается наугад одно число. Событие A состоит в том, что выбрано четное число, а событие B — в том, что выбрано число, делящееся на 3. Зависимы ли эти события?

Пример 2.

Из партии деталей извлекаются 4. Вероятность того, что деталь доброкачественная, равна 0,85. Для дальнейшего использования требуется не менее трех доброкачественных деталей. Найдем вероятность этого события.

Решение. Пусть событие E — «из партии извлечено не менее 3 доброкачественных деталей». Обозначим через A событие — «из партии извлечено ровно 3 доброкачественные детали», а через B событие — «извлечено ровно 4 доброкачественные детали». Тогда $E=A\cup B$. События A и B несовместны, и поэтому $p(E)=p(A)+p(B)$.

Найдем вероятности.

По формуле (12) получаем $p(A)=C_4^3\cdot(0{,}85)^3\cdot(0{,}15)\approx 0{,}37$. Аналогично, $p(B)=C_4^4\cdot(0{,}85)^4\cdot(0{,}15)^0\approx 0{,}52$.

Теперь имеем $p(E)\approx 0{,}37+0{,}52=0{,}89$.

Пример 3.

Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,1. Одновременно эксплуатируется 10 таких систем. Найдем вероятность отказа ровно трех систем.

Решение. Пусть событие A — «отказ одной системы». Тогда по условию $p(A)=p=0{,}1$, $q=1-p=0{,}9$. Вероятность отказа $m=3$ систем из $n=10$ эксплуатируемых равна:

$$C_{10}^3\cdot p^3\cdot q^{10-3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^7\approx 0{,}057.$$

УПРАЖНЕНИЯ

58. Опыт состоит в бросании двух однородных монет. Рассмотрим следующие события:

а) A — «появление герба на первой монете»;
б) B — «появление цифры на первой монете»;
в) C — «появление герба на второй монете»;
г) D — «появление цифры на второй монете»;
д) E — «появление хотя бы одного герба»;
е) F — «появление хотя бы одной цифры»;
ж) G — «появление одного герба и одной цифры»;
з) H — «непоявление хотя бы одного герба»;
и) K — «появление двух гербов».

Определите, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $A\cup C$; 2) $A\cap C$; 3) $E\cap F$; 4) $G\cup E$; 5) $G\cap E$; 6) $B\cap D$; 7) $E\cup K$.

59. По мишени производится 3 выстрела. Рассматриваются события A_1, A_2, A_3 — попадания при первом, втором и третьем выстрелах.

73. В урне находится a белых шаров и b неразличимых на ощупь шаров. Пусть событие A — «вынут белый шар», а событие B — «вынут белый шар после того, как из нее уже извлечен один шар». Какова вероятность того, что будут вынуты 2 белых шара?

74. Из класса, в котором учатся 15 мальчиков и 13 девочек, следует случайным образом отобрать 2 мальчиков для участия в тестировании. Для этого фамилии учащихся написали на одинаковых листках бумаги, скатали эти бумажки и положили в игровой барабан. После вращения из него последовательно вынули 2 бумажки. Какова вероятность того, что это будут фамилии мальчиков?

75. Бросали два кубика: к — красный, б — белый. Найдите вероятность события A — «на красном кубике выпало одно очко при условии, что сумма очков на красном и белом кубиках меньше 4». Напомним, что в паре (к, б) первое число показывает, сколько очков выпало на красном кубике, а второе — на белом.

76. Бросают два кубика: к — красный, б — белый. Найдите вероятность события: на красном кубике выпало 2 очка при условии, что сумма очков на красном и белом кубиках не превышает 4.

77. Бросают красный и белый кубики. Найдите вероятность того, что на красном кубике выпадет 4 очка при условии, что очков на красном и белом кубиках больше 4?

78. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

79. Из большой партии изделий берут на пробу 10 изделий. Известно, что доля нестандартных изделий составляет 25%. Найдите вероятность того, что:

а) четыре изделия окажутся нестандартными;

б) пять изделий окажутся нестандартными.

80. Найдите вероятность того, что событие A появится не менее 3 раз в 4 испытаниях, если $p(A) = 0{,}4$.

81. Каждый пятый клиент банка приходит в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают обслуживания 6 человек. Какова вероятность того, что проценты будут брать только 2 человека?

82. Каждый четвертый клиент банка приходит в банк для того, чтобы снять деньги со счета. В банке ожидают обслуживания 5 человек. Какова вероятность того, что деньги снимут 3 человека?

83. Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,2. Эксплуатируется 8 таких систем. Найдите вероятность отказа ровно 4 систем.

$\boxed{\textbf{84.}}$ Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,15. Эксплуатируется 7 таких систем. Найдите вероятность отказа ровно 5 систем.

$\boxed{\textbf{85.}}$ Вероятность отказа элемента равна 0,2. В систему введены 6 подобных элементов, работающих одновременно. При этом система выходит из строя только в том случае, когда отказывают все 6 элементов. Найдите вероятность безотказной работы системы.

Глава XII

1. $A_{10}^6=151\,200$. **2.** $A_6^2=30$; $A_9^2-A_6^2=42$. **3.** 60 480. **4.** 10 артистов. **5.** 1 512 000. **6.** а) $x=10$; б) $x=15$. **7.** 120. **8.** 5 040. **9.** а) 2! 18! 19; б) 18·19! **10.** $7\cdot 6\cdot P_5=5\,040$. **11.** а) $x=7$; б) $x=9$. **12.** 120. **13.** 1320. **14.** 5040. **15.** а) 120; б) $3\cdot A_5^2=60$; в) 40. **16.** а) 120; б) 60; в) 24. **18.** 13 983 816. **19.** а) 2002; б) $C_8^3\cdot C_6^2=840$; в) 56; г) 62. **20.** $C_{10}^4C_{10}^7C_{10}^5=6\,350\,400$. **21.** $C_9^3C_6^3C_3^3=1680$. **22.** 254 940. **23.** $(n-1)!\times$ $\times(n-2)$. **24.** а) $C_8^2C_{42}^3=321\,440$; б) 372 652. **25.** $\dfrac{nm(n-1)(m-1)}{4}$. **26.** 4680. **27.** 2520. **28.** 126 000. **29.** 2520. **30.** $C_m^kC_n^{r-k}$. **31.** а) 3; б) 6; в) 3; 14; г) 9; д) 12; е) 5. **32.** 14 400. **33.** 100; 90. **34.** 768. **35.** 134. **36.** 7 920 400. **37.** $p\approx 0{,}08$. а) Да; б) нет; в) нет; г) 8000. **38.** а) $P(A)\approx 0{,}257$; $P(B)\approx 0{,}248$; $P(C)\approx 0{,}495$; б) 51 400, 49 600 и 99 000. **39.** $P(A)\approx\dfrac{7451}{30\,000}$. а) Нет; б) приблизительно 348. **40.** а) 0,694; б) 0,710; в) 0,708; г) 0,702. *Гипотеза:* вероятность поражения цели равна 0,7. **42.** а) $P(A)=\dfrac{1}{2}$; б) $P(B)=\dfrac{2}{3}$. **43.** а) $P(A_2)=P(A_{12})=\dfrac{1}{36}$; $P(A_3)=P(A_{11})=\dfrac{1}{18}$; $P(A_4)=P(A_{10})=\dfrac{1}{12}$; $P(A_5)=P(A_9)=\dfrac{1}{9}$; $P(A_6)=P(A_8)=\dfrac{5}{36}$; $P(A_7)=\dfrac{1}{6}$; б) $P(B)=\dfrac{1}{3}$; в) $P(D)=\dfrac{13}{18}$; г) игра несправедливая; P (выигрыш I) $=\dfrac{1}{3}$; P (выигрыш II) $=\dfrac{2}{3}$. Для уравнения шансов на выигрыш достаточно, например, считать, что первый игрок выигрывает и в случае, когда сумма очков равна 7. Тогда P (выигрыш I) $=P$ (выигрыш II) $=\dfrac{1}{2}$. **44.** а) $P(A)=\dfrac{1}{2}$; б) $P(B)=\dfrac{3}{4}$. **45.** а) $P(u_i)=0{,}01$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 100$; б) $P(A)=0{,}33$; в) $P(B)=0{,}06$; г) $P(C)=0{,}18$; д) существует. Если событие D: «на карточке написано число, делящееся на 9», то $P(D)=0{,}11$. **46.** б) $P(A)=\dfrac{1}{4}$; $P(B)=\dfrac{1}{4}$; $P(C)=\dfrac{1}{2}$; $P(D)=\dfrac{3}{4}$. **47.** а) M — мальчик, D — девочка. Равновероятные исходы: $U_1=(M,M,M)$, $U_2=(MMD)$, $U_3=(MDM)$, $U_4=(MDD)$, $U_5=(DMM)$, $U_6=(DMD)$, $U_7=(DDM)$, $U_8=(DDD)$ (рис. 130). $P(U_i)=\dfrac{1}{8}$; $i=1,\ 2,\ \ldots,\ 8$; б) $P(A)=\dfrac{1}{8}$; $P(B)=\dfrac{3}{8}$; $P(C)=\dfrac{3}{8}$; $P(D)=\dfrac{1}{8}$; $P(E)=\dfrac{1}{4}$; $P(F)=\dfrac{3}{4}$. **48.** а) Равновероятные исходы: $U_1=$(ММММ), $U_2=$(МММД), $U_3=$(ММДМ), $U_4=$(ММДД), $U_5=$(МДММ), $U_6=$(МДМД), $U_7=$(МДДМ), $U_8=$(МДДД), $U_9=$(ДМММ), $U_{10}=$(ДММД), $U_{11}=$(ДМДМ), $U_{12}=$(ДМДД), $U_{13}=$(ДДММ), $U_{14}=$(ДДМД), $U_{15}=$(ДДДМ), $U_{16}=$(ДДДД); б) $P(A)=\dfrac{11}{16}$; $P(B)=\dfrac{5}{16}$; $P(C)=\dfrac{3}{8}$; $P(D)=\dfrac{1}{2}$. **49.** а) $P(A)=\dfrac{33}{59}$; б) $P(B)=\dfrac{7}{118}$; в) $P(A)=\dfrac{C_n^3}{C_m^3}$, $P(B)=\dfrac{C_{m-n}^3}{C_m^3}$. **50.** а) $P(A)=\dfrac{2C_{14}^4}{C_{20}^{10}}$;

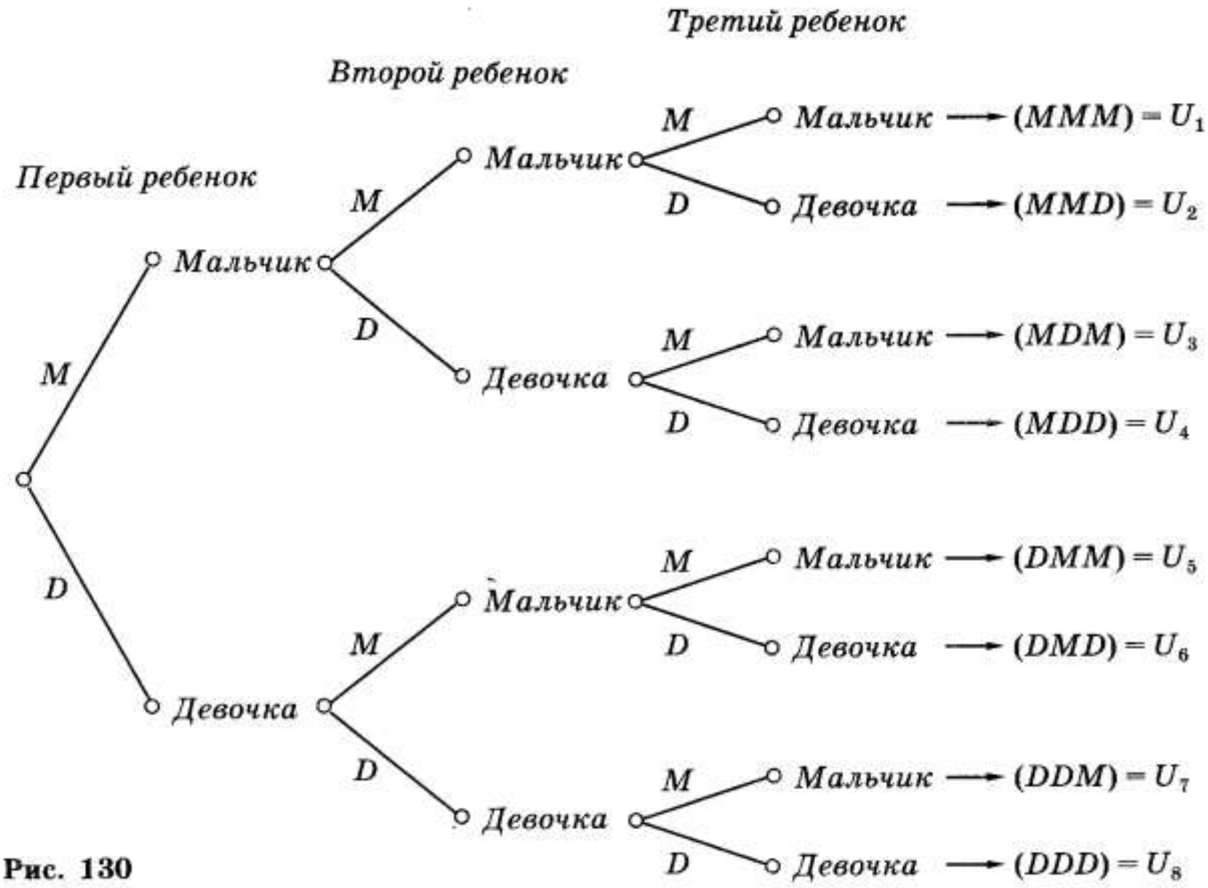
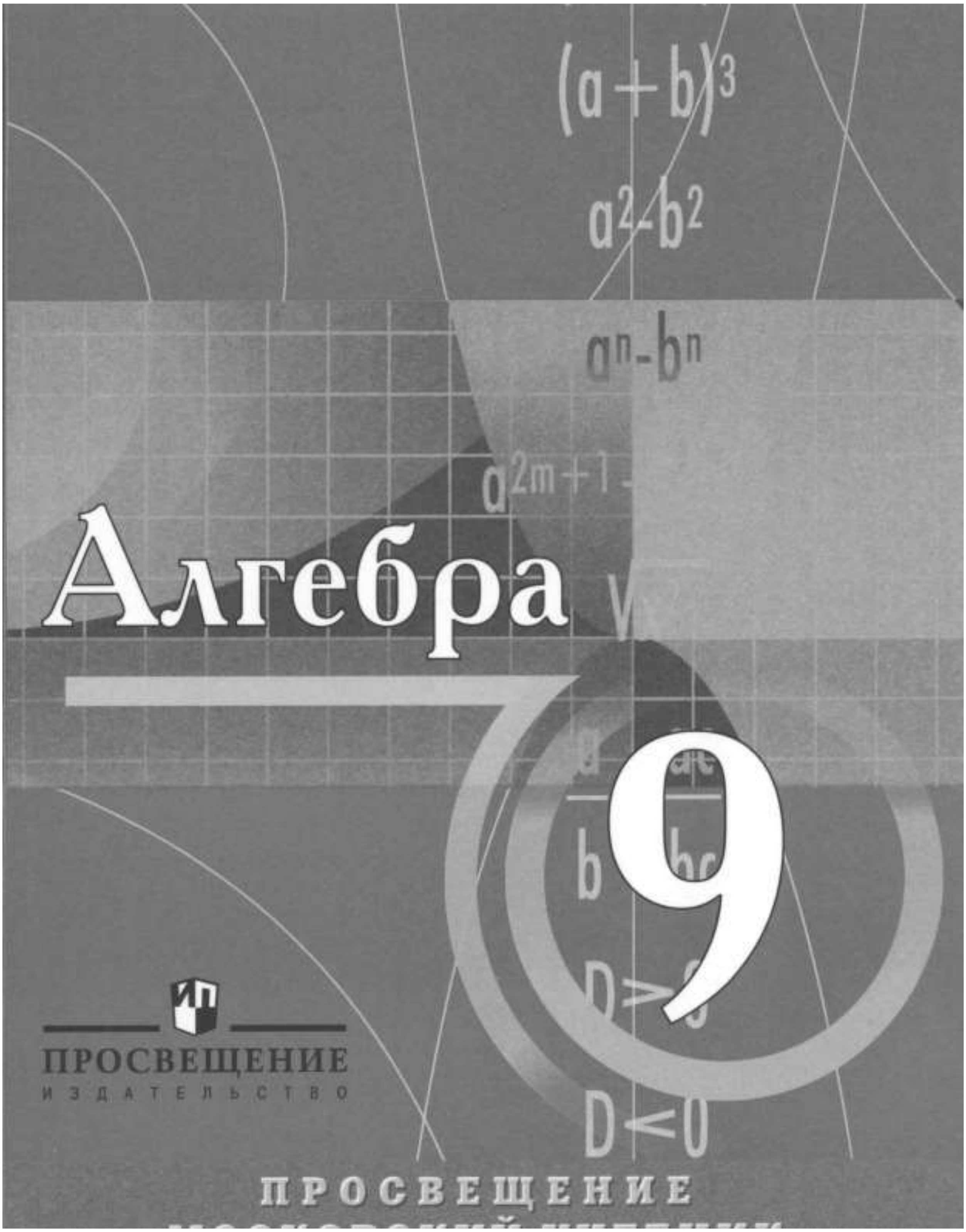


Рис. 130

б) $2C_6^2 \dfrac{C_{14}^8}{C_{20}^{10}} = \dfrac{315}{586}$. **51.** а) $n = C_{100}^5$, $P(A) = \dfrac{1}{n} C_{85}^5$; б) $P(B) = \dfrac{1}{n} C_{15}^5$; в) $P(C) = \dfrac{1}{n} C_{85}^3 \cdot C_{15}^2$; г) $P(B_1) = \dfrac{C_n^r}{C_m^r}$; $P(C_1) = \dfrac{C_n^s C_{m-n}^{r-s}}{C_m^r}$. **52.** а) $P(A) = \dfrac{1}{28}$; б) $P(B) = \dfrac{3}{4}$; в) $P(C) = \dfrac{15}{28}$; г) $P(D) = \dfrac{5}{14}$. **53.** $P(A) = \dfrac{1}{9!}$. **54.** а) $P(A) = \dfrac{C_{12}^3 C_8^2}{C_{20}^5} = \dfrac{385}{769}$; б) $P(B) = \dfrac{C_e^k C_{n-e}^{m-k}}{C_n^m}$. **55.** $P(A) = \dfrac{47}{5370}$. **56.** а) $P(A) = \dfrac{60}{253}$; б) $P(B) = \dfrac{15}{253}$. **57.** $P(A) = \dfrac{1}{40\,320}$. **58.** 1) E; 2) K; 3) G; 4) E; 5) G; 6) H; 7) E. **59.** 1) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; 2) $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; 3) $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; 4) $D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$. **60.** 0,07. **61.** 0,8. **62.** 0,96. **63.** 0,3. **64.** $\dfrac{11}{51}$. **65.** $\dfrac{49}{143}$. **66.** $\dfrac{14}{35}$. **67.** $\dfrac{140}{143}$. **68.** $\dfrac{31}{35}$. **69.** $\dfrac{2}{3}$. **70.** Независимы. **71.** Независимы. **72.** Зависимы. **73.** $\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$. **74.** $\dfrac{15}{54}$. **75.** $\dfrac{2}{3}$. **76.** $\dfrac{1}{3}$. **77.** $\dfrac{1}{3}$. **78.** 0,28. **79.** а) 0,146; б) 0,0162. **80.** 0,1792. **81.** 0,25. **82.** 0,088. **83.** 0,046. **84.** 0,0016. **85.** 0,999936.



(a+b)³
a²-b²
aⁿ-bⁿ
Алгебра
9
D<0
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПРОСВЕЩЕНИЕ